Písemná zkouška z Matematiky I pro FSV (A)
ZS 2018/2019

Úloha 1 (13 bodů)**.** Spočtěte následující limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n+\cos\left(\frac{3}{n}\right)}}{\sqrt[6]{n^2+\sin\left(\frac{2}{n}\right)} - \sqrt[3]{n}}.$$

Úloha 2 (13 bodů)**.** Spočtěte následující limitu funkce.

$$\lim_{x\to 0+} \left(\frac{1+\sqrt{\tan(x)}}{\cos(\sqrt{x})}\right)^{\frac{\sqrt{1-\sqrt{\sin(x)}}-\sqrt{1+\sqrt{\tan(x)}}}{x}}.$$

Úloha 3 (11 bodů)**.** Vyšetřete spojitost funkce f a spočtěte derivaci, resp. jednostranné derivace, funkce f ve všech bodech, kde existují.

$$f(x) = \cos(\max\{x, x^2\}).$$

Úloha 4 (13 bodů)**.** Uvažujte funkci

$$f(x) = |x+3| + 2\arctan(|x+1|).$$

(a) Určete intervaly monotonie funkce f a nalezněte její lokální extrémy.
(b) Určete intervaly, na kterých je f konvexní. Určete intervaly, na kterých je f konkávní. Nalezněte inflexní body.
(c) Spočtěte asymptotu funkce f v $-\infty$.

Řešení

Úloha 1. $\frac{9}{2}$.

Úloha 2. $\frac{1}{e}$.

Úloha 3. f je spojitá na $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \begin{cases} -\sin(x^2)2x & : x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty), \\ -\sin(x) & : x \in (0,1), \end{cases}$$

$f'(0) = 0$, $f'_-(1) = -\sin(1)$, $f'_+(1) = -2\sin(1)$ a tedy $f'(1)$ neexistuje.

Úloha 4. Funkce f je rostoucí na intervalech $[-3,-2]$, $[-1,+\infty)$ a klesající na intervalech $(-\infty,-3]$, $[-2,-1]$. Funkce f nabývá lokálního maxima v bodě -2 a lokálních minim v bodech -3 a -1. Funkce f je konkávní na intervalech $(-\infty,-3)$, $(-3,-1)$, $(-1,+\infty)$ a nemá inflexní bod. Asymptotou k funkci f v $-\infty$ je graf funkce $l(x) = -x + \pi - 3$.

Písemná zkouška z Matematiky I pro FSV (B)
ZS 2018/2019

Úloha 1 (13 bodů)**.** Spočtěte následující limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{4n} + (4n)^n} \left(\left(2 + \frac{1}{n^2}\right)^{18} - \left(4 + \frac{4}{n^2}\right)^{9} \right).$$

Úloha 2 (13 bodů)**.** Spočtěte následující limitu funkce.

$$\lim_{x\to 0} \left(\cos(x) + \frac{1}{\cos(x)} - 1 \right)^{\frac{1}{\sin(x^4)}}.$$

Úloha 3 (11 bodů)**.** Vyšetřete spojitost funkce f a spočtěte derivaci, resp. jednostranné derivace, funkce f ve všech bodech, kde existují.

$$f(x) = \sqrt[3]{3^{|x^2-1|} - 3}.$$

Úloha 4 (13 bodů)**.** Uvažujte funkce

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + x + 1}, \\ g(x) &= f_{|[0,+\infty)}(x). \end{aligned}$$

Neboli funkce g je restrikcí funkce f na interval $[0, +\infty)$.

(a) Určete intervaly monotonie funkce g.

(b) Rozhodněte, zda existuje inverzní funkce k funkci g a pokud ano, tak určete definiční obor g^{-1}.

(c) Určete intervaly, na kterých je funkce g konvexní. Určete intervaly, na kterých je funkce g konkávní. Nalezněte inflexní body funkce g.

Řešení

Úloha 1. $9 \cdot 2^{16}$.

Úloha 2. $\sqrt[4]{e}$.

Úloha 3. f je spojitá na $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{3^{\left|x^2-1\right|} \log(3) \operatorname{sign}\left(x^2-1\right) 2x}{3\left(\sqrt[3]{3^{|x^2-1|}-3}\right)^2} & : x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1, \pm\sqrt{2}\}, \\ -\infty & : x = -\sqrt{2}, \\ +\infty & : x = \sqrt{2}, \end{cases}$$

$f'_-(\pm 1) = -\frac{\sqrt[3]{2}}{3} \log(3)$, $f'_+(\pm 1) = \frac{\sqrt[3]{2}}{3} \log(3)$, $f'_-(0) = +\infty$, $f'_+(0) = -\infty$ a tedy $f'(\pm 1)$ a $f'(0)$ neexistují.

Úloha 4. Funkce g je rostoucí a tedy má inverzní funkci, jejíž definiční obor je roven oboru hodnot funkce g, což je $[1, +\infty)$. Funkce g je konvexní na intervalu $\left(0, \frac{7+\sqrt{69}}{2}\right)$, konkávní na intervalu $\left(\frac{7+\sqrt{69}}{2}, +\infty\right)$ a má inflexní bod $\frac{7+\sqrt{69}}{2}$.

Písemná zkouška z Matematiky I pro FSV (C)
ZS 2018/2019

Úloha 1 (13 bodů)**.** Spočtěte následující limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^{48}+n}-\sqrt[3]{n^{48}+n^2}\right)\left(\left(n^3+3\right)^{12}-\left(n^4+4n\right)^9\right).$$

Úloha 2 (13 bodů)**.** Spočtěte následující limitu funkce.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{4^{\operatorname{tg}(x)}+\cos(x)}{2}\right)^{\operatorname{cotg}(x)}.$$

Úloha 3 (11 bodů)**.** Vyšetřete spojitost funkce f a spočtěte derivaci, resp. jednostranné derivace, funkce f ve všech bodech, kde existují.

$$f(x)=\cos(x)^{\min\{2,x^3+x^2-2x+2\}}.$$

Úloha 4 (13 bodů)**.** Uvažujte funkci

$$f(x)=\frac{4^x-12}{(2^x-9)^2}.$$

(a) Najděte definiční obor funkce f.
(b) Určete intervaly monotonie funkce f a nalezněte její lokální i globální extrémy.
(c) Určete intervaly, na kterých je f konvexní. Určete intervaly, na kterých je f konkávní. Nalezněte inflexní body.

Řešení

Úloha 1. -6.

Úloha 2. 2.

Úloha 3. Položme $g(x)=\min\{2,x^3+x^2-2x+2\}$. Pak funkce g je spojitá a definovaná na $\mathbb{R}$, neboť minimum z dvou spojitých funkcí je spojitá funkce. Protože

$$f(x)=e^{\log(\cos(x))g(x)},$$

tak

$$D_f=\{x\in\mathbb{R};\ \cos(x)>0\}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$$

a f je spojitá na D_f. Používáme fakt, že složení dvou spojitých funkcí je spojitá funkce. Dále

$$g(x)=\begin{cases}x^3+x^2-2x+2 & : x\in(-\infty,-2>\cup<0,1>,\\ 2 & : x\in<-2,0>\cup<1,+\infty).\end{cases}$$

Pak

$$g'(x)=\begin{cases}3x^2+2x-2 & : x\in(-\infty,-2)\cup(0,1),\\ 2 & : x\in(-2,0)\cup(1,+\infty).\end{cases}$$

a

$$f'(x)=f(x)(\log(\cos(x))g(x))'=f(x)(-\operatorname{tg}(x)g(x)+\log(\cos(x))g'(x)),$$

kde $x\in D_f\setminus\{0,1\}$. Protože f je spojitá v bodech $0,1$, tak můžeme počítat jednostranné derivace v těchto bodech jako příslušné jednostranné limity derivací a obdržíme: $f'_-(0)=f'_+(0)=0$, $f'_+(1)=-2\cos^2(1)\operatorname{tg}(1)$ a $f'_-(1)=-\cos^2(1)(2\operatorname{tg}(1)-3\log(\cos(1)))$. Tedy derivace v bodě 1 neexistuje a $f'(0)=0$.

Úloha 4. Řešení

(a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\log_2(9)\}$.

(b) Funkce f je rostoucí na intervalu $\left[\log_2\left(\frac{4}{3}\right), \log_2(9)\right)$ a klesající na intervalech $\left(-\infty, \log_2\left(\frac{4}{3}\right)\right]$, $(\log_2(9), +\infty)$ a má lokální minimum v bodě $\log_2\left(\frac{4}{3}\right)$. Neboť $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ a $f\left(\log_2\left(\frac{4}{3}\right)\right) < 0$, tak bod $\log_2\left(\frac{4}{3}\right)$ je i globálním minimem funkce f. Protože $\lim_{x\to\log_2(9)} f(x) = +\infty$ tak f nemá globální maximum.

(c) Funkce f je konvexní na intervalech $\left(\log_2\left(\frac{-23+\sqrt{637}}{3}\right), \log_2(9)\right)$, $(\log_2(9), +\infty)$ a konkávní na intervalu $\left(-\infty, \log_2\left(\frac{-23+\sqrt{637}}{3}\right)\right)$. Inflexním bodem je bod $\log_2\left(\frac{-23+\sqrt{637}}{3}\right)$.

Písemná zkouška z Matematiky I pro FSV (D)
ZS 2018/2019

Úloha 1 (13 bodů)**.** Spočtěte následující limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(1^1 + 2^2 + \cdots + n^n\right)}{\sqrt{n^4 + 2n^3\log(n)} - \sqrt{n^4 - n^3}}.$$

Úloha 2 (13 bodů)**.** Spočtěte následující limitu funkce.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \left(2\sin(x)\right)^{\frac{2}{\pi-6x}}.$$

Úloha 3 (11 bodů)**.** Vyšetřete spojitost funkce f a spočtěte derivaci, resp. jednostranné derivace, funkce f ve všech bodech, kde existují.

$$f(x) = \operatorname{sign}(x^3 - 4x)\sin(x^3 - 2x^2).$$

Úloha 4 (13 bodů)**.** Uvažujte funkci

$$f(x) \quad = \quad \sqrt[3]{\frac{x^2}{x-3}}.$$

(a) Určete intervaly monotonie funkce f, nalezněte její lokální extrémy a určete její obor hodnot.
(b) Určete intervaly, na kterých je f konvexní. Určete intervaly, na kterých je f konkávní. Nalezněte inflexní body.
(c) Načrtněte obrázek funkce f.

Řešení

Úloha 1. 1.

Úloha 2. $e^{-\sqrt{\frac{1}{3}}}$.

Úloha 3. f je spojitá na $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

$$f'(x) = \begin{cases} \operatorname{sign}(x^3-4x)\cos(x^3-2x)(3x^2-4x) & : x \in \mathbb{R}\setminus\{0,\pm 2\}, \\ 0 & : x = 0, \\ +\infty & : x = -2, \end{cases}$$

$f'_+(2) = 4$, $f'_-(2) = -4$ a tedy $f'(2)$ neexistuje.

Úloha 4. Funkce f je rostoucí na intervalech $(-\infty, 0>, <6, +\infty)$ a klesající na intervalech $<0, 3), (3, 6>$. Funkce f nabývá lokálního maxima v bodě 0, lokálních minima v bodě 6 a $H(f) = (-\infty, 0> \cup < \sqrt[3]{12}, +\infty)$. Funkce f je konvexní na intervalech $(-\infty, 0)$, $\left(0, 6-3\sqrt{3}\right)$, $\left(3, 6+3\sqrt{3}\right)$ a konkávní na intervalech $\left(6-3\sqrt{3}, 3\right)$, $\left(6+3\sqrt{3}, +\infty\right)$. Inflexní body funkce f jsou $6 \pm 3\sqrt{3}$.

Písemná zkouška z Matematiky I pro FSV (E)
ZS 2018/2019

Úloha 1 (13 bodů)**.** Spočtěte následující limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\arcsin\left(\sqrt{n^2+\sin^2(n)}-\sqrt{n^2-\cos^2(n)}\right)}{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}.$$

Úloha 2 (13 bodů)**.** Spočtěte následující limitu funkce.

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\log(x+1)}{\log(x-1)}\right)^{x\log(x)}.$$

Úloha 3 (11 bodů)**.** Vyšetřete spojitost, resp. jednostrannou spojitost funkce f a spočtěte derivaci, resp. jednostranné derivace, funkce f ve všech bodech, kde existují.

$$f(x) = \left[\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}(x)\right] x^2.$$

(Výraz $[z]$ značí celou část čísla $z \in \mathbb{R}$.)

Úloha 4 (13 bodů)**.** Uvažujte funkci

$$f(x) \quad = \quad \operatorname{arccotan}\left(\frac{1}{1-x^3}\right).$$

(a) Určete intervaly monotonie funkce f, nalezněte její lokální extrémy a určete její obor hodnot.
(b) Určete intervaly, na kterých je f konvexní. Určete intervaly, na kterých je f konkávní. Nalezněte inflexní body.
(c) Načrtněte obrázek funkce f.

Řešení

Úloha 1. $\frac{1}{2}$.

Úloha 2. e^2.

Úloha 3. f je spojitá, respektive spojitá zleva na $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ a spojitá zprava na $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\left[\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}(x)\right] & : x \in \mathbb{R}\setminus\{0,\pm 1\}, \\ 0 & : x = 0, \end{cases}$$

$f'_-(\pm 1) = +\infty$, $f'_+(\pm 1) = 2$ a tedy $f'(\pm 1)$ neexistuje.

Úloha 4. Funkce f je klesající na intervalech $(-\infty, 1), (1, +\infty)$. Funkce f nemá lokální extrémy a $H(f) = (0,\pi)\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$. Funkce f je konvexní na intervalech $\left(\sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{17}}{4}}, 0\right)$, $\left(\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{17}}{4}}, +\infty\right)$ a konkávní na intervalech $\left(-\infty, \sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{17}}{4}}\right)$, $(0,1)$, $\left(1, \sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{17}}{4}}\right)$. Inflexní body funkce f jsou body $\sqrt[3]{\frac{1\pm\sqrt{17}}{4}}$, 0.